PRODUCTO ESCALAR. ESPACIOS DE HILBERT

1. Demostrar que en todo espacio prehilbertiano se verifica la identidad siguiente, llamada de Apolonio:

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

2. Consideremos en ℓ_2 los vectores $u_1 = (1,0,1,0,0,0...)$, $u_2 = (2,-1,0,0,0,...)$. Sea

$$e_n = (0,0,...,0,1_{\frown n},0,0...)$$

con 1 en el lugar n. Sea E el subespacio de ℓ_2 generado por $\{u_1,u_2\} \cup \{e_n : n \geq 4\}$.
(a) Determinar el subespacio $E^\perp$ ortogonal a E.
(b) Calcular la proyección de $v = (1,0,0,0,...)$ sobre E y $E^\perp$.
(c) Calcular la distancia de v a E y a $E^\perp$.

3. Sea H un espacio de Hilbert real, $a \in H$ y $T : H \to \mathbf{R}$ la aplicación lineal y continua definida por $Tx = (x|a)$.
(a) Probar que para cada $x_0 \in H$ se tiene que $\inf\{\|x_0 - y\| : y \in Ker\,T\} = |(x_0 \mid a/\|a\|)|$. (Ind.: Observar que el vector $x_0 - T(x_0)a/\|a\|^2$ pertenece a $Ker\,T$).
(b) Sea $\phi : \ell_2 \to R$ definida por $\phi(x) = 2\xi_1$. Calcular la distancia del vector $x = (2^{-n/2})$ al núcleo de ϕ.

4. En el espacio prehilbertiano $C([-1,1])$ consideremos el subconjunto M de las funciones $f(t)$ tales que $f(t) = 0$ para todo $t \geq 0$.
(a) Demostrar que M es un subespacio cerrado de $C([-1,1])$.
(b) Describir el subespacio $M^\perp$.
(c) ¿Se cumple el teorema de la proyección para $C([-1,1])$?

5. Sea E el espacio vectorial formado por las sucesiones (ξ_n) de números reales que son nulas a partir de un término. Definimos en E el producto escalar

$$((\xi_n)|(\eta_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n.$$

Sea F el subespacio de E formado por las sucesiones $(\xi_n) \in E$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} = 0.$$

(1) Demostrar que $F^\perp = \{0\}$.
(2) Probar que F es un subespacio cerrado de E. ¿Es E un espacio de Hilbert?

6. Sea H un espacio prehilbertiano y E un subespacio de H. Se define $E^{\perp\perp} = (E^\perp)^\perp$.
(a) Si H es completo y E es cerrado probar que $E^{\perp\perp} = E$.
(b) Probar que (a) puede no ser cierto si H no es completo o E no es cerrado. (Ind.: Utilizar el problema 5).

(c) Supongamos que $E^{\perp\perp} \neq E$ y sea $x \in E^{\perp\perp} \setminus E$. Probar que no existe $y_0 \in E$ tal que $\|x - y_0\| \leq \|x - y\|$ para todo $y \in E$.

7. Sea P el espacio vectorial de los polinomios reales con el producto escalar definido por

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Dar un ejemplo de un funcional lineal continuo sobre P para el cual no se cumpla el Teorema de Representación de Riesz.

8. Sea $\{e_\alpha\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H. Probar que para cada $x \in X$ el conjunto $\{\alpha : (x|e_\alpha) \neq 0\}$ es numerable.

9. Sea H un espacio de Hilbert. Un sistema ortonormal $\{e_\alpha\}$ es llamado maximal si ningún sistema ortonormal lo contiene estrictamente.
(a) Probar que en todo espacio de Hilbert existen sistemas ortonormales maximales y que un sistema ortonormal maximal genera un espacio vectorial denso en H.
(b) Sea $\{e_n\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert H. Probar que las siguientes aserciones son equivalentes:
(i) El sistema $\{e_n\}$ es maximal.
(ii) El espacio vectorial generado por $\{e_n\}$ es denso en H.
(iii) Para cada $x \in H$ se verifica la igualdad de Parseval.
(c) Probar que un espacio de Hilbert es separable si y solo si existe un sistema ortonormal maximal numerable. Como consecuencia, probar que todo espacio de Hilbert separable es isométrico a ℓ_2.(Recordar que un espacio topológico es separable si contiene un conjunto numerable y denso).